

Cevap Anahtarı

Adı Soyadı:
Numarası:

25.11.2023

2023-2024 SOYUT MATEMATİK I DERSİ ARA SINAV SORULARI

1) a) Önermelerde 'ise' bağlacının 've' bağlacı üzerine sağ dağılma özelliğinin olup olmadığını araştırınız.

8p. b) i) $\forall x \in \mathbb{Z}, \frac{x}{x} = 1$ ii) $x, y \in \mathbb{Q}$, için $\exists x \forall y [x + y = \frac{1}{2}]$ önermelerinin doğruluk değerlerini ve olumsuzlarını bulunuz.

2) 8p. a) Küme ailesi ve iki kümenin kartezyen çarpımı kavramlarını tanımlayınız.

24p b) $G, \{k, l, m, n, o, p\}$ kümesinin bir alt kümesi olsun. $G \cup \{m, n\}$ kümesinin eleman sayısı 5 olacak şekildeki tüm farklı G kümelerini bulunuz.

25p c) A, B, C kümeleri için $(A \Delta B) \times C = (A \times C) \Delta (B \times C)$ eşitliğinin sağlanıp sağlanmadığını araştırınız.

3) 5pa) Her $a \geq 1$ doğal sayısı için

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + a^3 = \left(\frac{a(a+1)}{2}\right)^2$$

olduğunu gösteriniz.

10p. b) Her $a, b \geq 0$ reel sayısı için $\sqrt{2ab} \leq \frac{a+2b}{2}$ olduğunu çelişki bulma ispat yöntemi ile gösteriniz.

Cevap Anahtarı

1) a) $(p \wedge q) \Rightarrow r \equiv (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$ olup olmadığını inceleyelim. Doğruluk çizelgesi ile gösterebiliriz

p	q	r	$p \wedge q$	$p \Rightarrow r$	$q \Rightarrow r$	$(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$	$(p \wedge q) \Rightarrow r$	$\equiv (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$
1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	0	1
1	0	1	0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1	0
0	1	1	0	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	0	0	1	1
0	0	1	0	1	1	1	1	1
0	0	0	0	1	1	1	1	1

Yani sağ dağılma özelliği yoktur.

1) b) i) $\forall x \in \mathbb{Z}, \frac{x}{x} = 1 \equiv 0$ dir. Önerme $0 \in \mathbb{Z}$ olup

$\frac{0}{0}$ tanımsızdır Bu önermenin olumsuzu $\exists x \in \mathbb{Z}, \frac{x}{x} \neq 1$ dir.

ii) $\exists x \forall y [x+y = \frac{1}{2}] \equiv 0$ dir. Bu önermenin olumsuzu $\forall x \exists y [x+y \neq \frac{1}{2}]$ dir.

2) a) Tanımlar defterde mevcuttur.

b) $G \subseteq \{k, l, m, n, o, p\}$ olsun. $G \cup \{m, n\}$ kümesinin eleman sayısı 5 olacak şekilde farklı G kümeleri

$G = \{k, l, o\}, \{k, l, p\}, \{l, o, p\}, \{k, o, p\}, \{k, l, o, m\},$
 $\{k, l, o, n\}, \{k, l, p, m\}, \{k, l, p, n\}, \{l, o, p, m\}, \{l, o, p, n\},$
 $\{k, o, p, m\}, \{k, o, p, n\}, \{k, l, o, m, n\}, \{k, l, p, m, n\}, \{l, o, p, m, n\}$
 $\{k, o, p, m, n\}$ olabilir

c) $(A \Delta B) \times C = (A \times C) \Delta (B \times C)$ eşitliği sağlanır mı?

Öncelikle $A \Delta B$ kavramının eşit olduğu kavramı bulalım

$$\begin{aligned} A \Delta B &= (A \cup B) - (A \cap B) \\ &= (A \cup B) \cap (A \cap B)^c \\ &= (A \cup B) \cap (A^c \cup B^c) \\ &= ((A \cup B) \cap A^c) \cup ((A \cup B) \cap B^c) \\ &= ((A \cap A^c) \cup (B \cap A^c)) \cup ((A \cap B^c) \cup (B \cap B^c)) \\ &= (B \cap A^c) \cup (A \cap B^c) = (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c) = (A - B) \cup (B - A) \end{aligned}$$

Bu durumda sorudaaki eşitlik için

$$(A \times C) \Delta (B \times C) = ((A \times C) - (B \times C)) \cup ((B \times C) - (A \times C))$$

le ifade edilir. Şimdi de

$$(A - B) \times C = (A \times C) - (B \times C) \text{ olur mu? Gösterelim}$$

Keyfi bir $(x,y) \in (A-B) \times C$ aldım.

$$(x,y) \in (A-B) \times C \Leftrightarrow x \in A-B \wedge y \in C$$

$$\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \wedge y \in C$$

$$\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \wedge (y \in C \wedge y \in C)$$

$$\Leftrightarrow (x \in A \wedge y \in C) \wedge (x \notin B \wedge y \in C)$$

$$\Leftrightarrow (x,y) \in A \times C \wedge (x,y) \notin B \times C$$

$$\Leftrightarrow (x,y) \in (A \times C) - (B \times C)$$

0 halde $(A-B) \times C = (A \times C) - (B \times C)$ olur

Sonradaki eşitlige dönersek

$$\begin{aligned} (A \times C) \Delta (B \times C) &= ((A \times C) - (B \times C)) \cup ((B \times C) - (A \times C)); \\ &= ((A-B) \times C) \cup ((B-A) \times C) \end{aligned}$$

Şimdi de

$(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$ olur mu? Gösterelim.

Keyfi bir $(z,t) \in (A \cup B) \times C$ aldım.

$$(z,t) \in (A \cup B) \times C \Leftrightarrow z \in A \cup B \wedge t \in C$$

$$\Leftrightarrow (z \in A \vee z \in B) \wedge t \in C$$

$$\Leftrightarrow (z \in A \wedge t \in C) \vee (z \in B \wedge t \in C)$$

$$\Leftrightarrow (z,t) \in A \times C \vee (z,t) \in B \times C$$

$$\Leftrightarrow (z,t) \in (A \times C) \cup (B \times C)$$

0 halde $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$ olur. Soru

eşitlige dönersek

$$(A \times C) \Delta (B \times C) = ((A-B) \times C) \cup ((B-A) \times C)$$

$$= ((A-B) \cup (B-A)) \times C$$

$$= (A \Delta B) \times C \quad \text{bulunur.}$$

3) a) Tümevarım ile gösterelim.

$$a=1 \text{ için } 1^3 = 1 = \left(\frac{1 \cdot 2}{2}\right)^2 = 1^2 \text{ olup sağlanır.}$$

$a=k$ için doğru olsun. Yani

$$1^3 + 2^3 + \dots + k^3 = \left(\frac{k \cdot (k+1)}{2}\right)^2 \text{ olsun.}$$

$a=k+1$ için doğru olduğunu gösterelim.

$$1^3 + 2^3 + \dots + k^3 + (k+1)^3 = \left(\frac{k \cdot (k+1)}{2}\right)^2 + (k+1)^3$$

$$= \frac{k^2(k+1)^2}{4} + k^3 + 3k^2 + 3k + 1$$

$$= \frac{k^2(k^2 + 2k + 1)}{4} + k^3 + 3k^2 + 3k + 1$$

$$= \frac{k^4 + 2k^3 + k^2 + 4k^3 + 12k^2 + 12k + 4}{4}$$

$$= \frac{k^4 + 6k^3 + 13k^2 + 12k + 4}{4}$$

$$= \left(\frac{k^2 + 3k + 2}{2}\right)^2$$

$$= \left(\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right)^2 \text{ olup}$$

sağlanır

3) b) $\forall a, b \geq 0, a, b \in \mathbb{R}$ için $\sqrt{2ab} > \frac{a+2b}{2}$ olsun.

$$0 \text{ halde } 2ab > \left(\frac{a+2b}{2}\right)^2 \Rightarrow 2ab > \frac{a^2 + 4ab + 4b^2}{4}$$

$$\Rightarrow 8ab > a^2 + 4ab + 4b^2$$

$$\Rightarrow 4ab > a^2 + 4b^2$$

$$\Rightarrow a^2 - 4ab + 4b^2 < 0$$

$$\Rightarrow (a-2b)^2 < 0 \text{ olur ki}$$

bu bir çelişkidir 0 halde $\sqrt{2ab} \leq \frac{a+2b}{2}$ olur.